

Cálculo Numérico com Aplicações em Física
MAP0214
Folha 2
Procura de zeros de funções não lineares
unidimensionais

Alessio Mangiarotti

03.08.2026

1 Questões teóricas

Exercício 1.1 (P1 – 23-04-2015 – IFUSP)

Considere o método iterativo de Newton-Raphson para a procura do zero de uma função unidimensional $f(x)$ que é C^2 em toda a região de interesse.

- a) Os dois painéis da Figura 1 acima mostram situações nas quais o método de Newton-Raphson não converge ou converge muito lentamente. Ilustre as figuras identificando a origem do problema. Indique possíveis formas de proteger o algoritmo de Newton-Raphson para evitar esses problemas.
- b) Considere a função

$$f(x) = (x - x_0)^2 \tag{1}$$

e considere a taxa de convergência do erro

$$e_i = x_i - x_0 \tag{2}$$

definida pelo valor r que faz o limite

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|e_{i+1}|}{|e_i|^r} = C \tag{3}$$

ter um valor C finito não nulo. Demonstre que para a função f definida na Eq. (1) a taxa de convergência é linear. Observe que a função f da Eq. (1) tem um zero duplo. Qual é a taxa de convergência para um zero único?

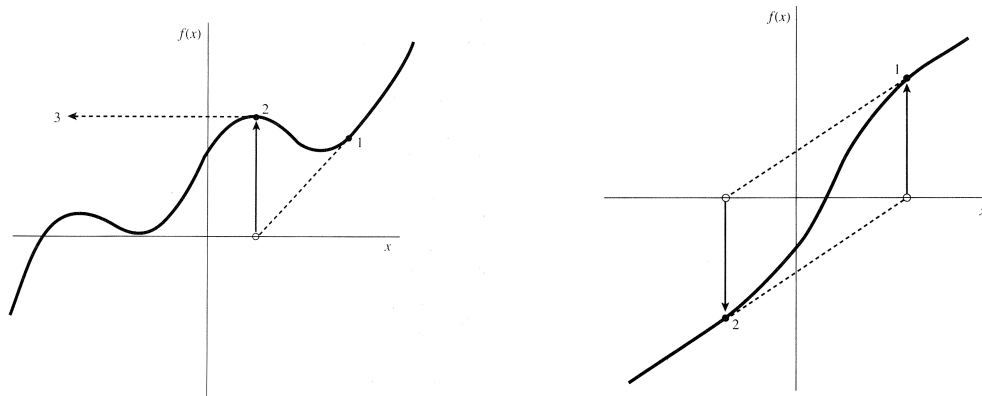


Figura 1: Ilustrações gráfica de duas situações nas quais o método iterativo de Newton-Raphson não consegue convergir, apresentadas em W.H.Press, S.A.Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, "Numerical Recipes in Fortran 77 – The Art of Scientific Computing", 2ª ed., Cambridge University Press, Cambridge 1992, Figuras 9.4.1 e 9.4.2 na pagina 357.

Exercício 1.2 (SUB – 14-07-2015 – IFUSP)

O método da secante

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \quad (4)$$

é usado para encontrar uma solução da seguinte equação

$$f(x) = x^2 - 1 = 0 \quad (5)$$

a) Considere o caso onde sejam usados os seguintes valores iniciais

$$\begin{cases} x_0 = 1 + \epsilon \\ x_1 = -1 + \epsilon \end{cases}, \quad (6)$$

e encontre as expressões de x_2 , x_3 , x_4 e x_5 corretas até ordem $O(\epsilon^2)$. Explique o motivo pelo qual o método converge à solução $x = -1$ (ao minimo para valores suficientemente pequenos de ϵ).

b) Considere agora que sejam usados os seguintes valores iniciais

$$\begin{cases} x_0 = -1 + \epsilon \\ x_1 = 1 + \epsilon \end{cases} \quad (7)$$

e repita o cálculo anterior de x_2 , x_3 , x_4 e x_5 . Mostre que o método converge para a solução $x = 1$.

Exercício 1.3 (P1 – 29-03-2016 – IFUSP)

Considere o método iterativo da secante para a procura do zero de uma função unidimensional $f(x)$ que é C^3 em toda a região de interesse.

- a) Deduza a fórmula iterativa desse método.
- b) Considere o erro do método ao passo i -ésimo

$$e_i = x_i - x_0 \quad (8)$$

onde x_0 é a localização do zero (i.e. $f(x_0) = 0$) e x_i é a aproximação da localização do zero fornecida pelo método da secante ao passo i -ésimo. A taxa de convergência do método é definida pelo valor r que faz o limite

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|e_{i+1}|}{|e_i|^r} = C \quad (9)$$

ter um valor C finito não nulo. Demonstre que se a função f tem em x_0 um ponto estacionário a taxa de convergência é linear. Qual é a taxa de convergência para um zero que não é um ponto estacionário da função (é optativo mostrar a dedução desse caso)?

Exercício 1.4 (P1 – 11-09-2017 – IFUSP)

O método iterativo de Halley para a procura do zero de uma função unidimensional $f(x)$ que é C^4 em toda a região de interesse generaliza o método de Newton-Raphson considerando uma aproximação de ordem superior a função.

- a) Deduza a fórmula iterativa geral do método de Newton.
- b) Uma dedução simples da fórmula iterativa do método de Halley é obtida aplicando o método de Newton à procura do zero da função auxiliar $g(x)$ definida como

$$g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{|f'(x)|}} \quad (10)$$

Repare que se a derivada $f'(x)$ de $f(x)$ é não singular e não nula, os zeros de $f(x)$ e de $g(x)$ coincidem. Encontre a fórmula iterativa geral do método de Halley.

- c) Escreva as fórmulas iterativas dos método de Newton e de Halley para encontrar o zero da função

$$f(x) = x^2 - 2 \quad (11)$$

- d) Faça duas iterações de cada método partindo do valor inicial $x_0 = 2$ e produza uma tabela comparando o erro relativo a cada etapa. O que pode dizer sobre a convergência dos métodos?

Exercício 1.5 (P1 – 17-10-2018 – IFUSP)

O esquema iterativo da “Regula falsi”, um método que pode ser usado para encontrar a solução de uma equação não linear $f(x) = 0$ em uma dimensão (i.e. x é um número real), pode assumir a seguinte forma

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \frac{x_i - x_0}{f(x_i) - f(x_0)} \quad (12)$$

onde x_0 e x_1 são os valores usados para inicializar as iterações.

- Deduza a Eq. (12) anterior, tomando cuidado em esclarecer em quais condições o método da “Regula falsi” leva a esse esquema iterativo. Explique com clareza o que faz o esquema iterativo (12) ser diferente que o método da secante.
- Encontre a taxa de convergência do esquema iterativo (12) e diga se o método da “Regula falsi” converge mais ou menos rapidamente do método da secante. Lembre que a taxa de convergência do método é definida pelo valor r que faz o limite

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|e_{i+1}|}{|e_i|^r} = C \quad (13)$$

ter um valor C finito não nulo, onde e_i é o erro ao passo i -ésimo.

2 Questões práticas

NOTA: Embora na prática vocês pudessem usar um método avançado com uma taxa geralmente ótima de convergência e com a garantia da convergência (como o algoritmo de Van Wijngaarden-Dekker-Brent ou o método de Newton-Raphson com proteção) para resolução desta lista, por razões didáticas, somente os métodos simples são permitidos: i) método da bisseção, ii) método de Newton-Raphson, iii) método da Secante e iv) método da “regula falsi”.

Exercício 2.1 (Kahaner, Moler e Nash)

O supercomputador Cray 1, desenvolvido por Seymour Cray de 1972 até 1976, na data do seu lançamento, era o computador mais rápido do mundo, com uma capacidade de cálculo de 80 Megaflop. O Cray 1 ganhou esse recorde da CDC 7600, outra máquina desenvolvida por Cray, com uma capacidade de cálculo de 10 Megaflop, e perdeu esse primado para o Cray X-MP em 1982, também desenvolvido por Cray, com uma capacidade de cálculo de 800 Megaflop. O Cray 1 era uma máquina vetorial, ou seja, capaz de operar de forma sequencial e regular, em um número prefixado de ciclos de clock, nos elementos de vetores. O usual algoritmo de subtrações sucessivas não pôde ser utilizado para implementar a divisão porque nesse caso o tempo de execução dependeria dos números em processamento. O Cray 1 continha em substituição uma “Reciprocal Approximation Unit” que fornecia um resultado do recíproco de um

The division algorithm that computes S_1 / S_2 to full precision requires four operations:

1. $S_3 = 1/S_2$	Reciprocal approximation
2. $S_4 = (2 - S_3 * S_2)$	Reciprocal iteration
3. $S_5 = S_1 * S_3$	Numerator * approximation
4. $S_6 = S_4 * S_5$	Half-precision quotient * correction factor

Figura 2: Página do “Hardware reference manual” do supercomputador Cray 1 detalhando como é obtido um valor acurado pela divisão de dois números em aritmética de ponto flutuante partindo do valor inicial aproximado fornecido pela “Reciprocal Approximation Unit”.

número usando uma aproximação acurada a cerca da metade dos bits da mantissa na representação de ponto flutuante em precisão simples (30 bits em 47). No caso que uma precisão maior fosse demandada, a aproximação era melhorada usando um passo do algoritmo de Newton-Raphson (ou mais no caso da precisão dupla). A pagina do manual do Cray 1 que descreve esse procedimento é reproduzida na Figura 2.

- Derive os passos de números 2, 3 e 4 da Figura 2 usando o método de Newton-Raphson para localizar o zero de uma função apropriada.
- Escreva um programa e conte os passos necessários para obter um valor de $1/R$ acurado até 6 casas decimais para os seguintes valores de R : 1,2,...,10. Use a estimativa inicial de 0,01 em todos os casos.
- Escreva um programa para executar a mesma tarefa usando o algoritmo da bisseção e compare o número de iterações necessárias para obter a mesma precisão da alínea precedente (faça uma tabela). Use como intervalo inicial $[0,01,2]$ em todos os casos.

Exercício 2.2 (Kahaner, Moler e Nash)

O método de Newton-Raphson pode ser usado para calcular iterativamente a raiz quadrada de um número das duas formas seguintes (matematicamente equivalentes):

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i - \frac{x_i^2 - 2}{2x_i} \\ x_{i+1} &= \frac{1}{2} \left(x_i + \frac{2}{x_i} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

- Derive as duas expressões (14) usando o método de Newton-Raphson para localizar o zero de uma função apropriada.
- Desenvolva um programa para calcular a raiz quadrada de um número usando as duas expressões (14) e compare os resultados. Experimente usando números bem maiores que 1 e bem menores. Conseguiria estabelecer qual das duas expressões é melhor? Por qual razão?

Exercício 2.3 (Kahaner, Moler e Nash)

Em lugares onde durante o inverno as temperaturas ficam abaixo de zero, é preciso ter cuidado durante a instalação dos canos no ambiente externo por causa da possibilidade da água congelar e romper os canos. Uma forma simples de os proteger é colocando-os abaixo do solo. As condições reais são complicadas, mas podemos razoavelmente aproximar o solo como um meio semi-infinito e homogêneo em todas as direções. Assumimos que ele se encontre em uma situação de equilíbrio térmico a uma temperatura uniforme T_i (obviamente T_i é superior à temperatura do ponto de gelo da água). Após uma nevasca, a temperatura da superfície diminui. Aproximamos a superfície como sendo mantida a uma temperatura constante T_e . Nesse caso, o perfil de temperatura varia com a profundidade no solo x e o tempo t transcorrido desde a nevasca segundo a fórmula

$$\frac{T(x,t) - T_e}{T_i - T_e} = \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) , \quad (15)$$

onde erf é a função erro e α a difusividade térmica do solo. Assuma que $T_i = 20^\circ\text{C}$, $T_e = -15^\circ\text{C}$ e $\alpha = 0,138 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sec}$. Determine a que profundidade o cano tem que ser colocado para congelar somente depois de 60 dias de exposição a esse valor constante de temperatura à superfície T_e .

Exercício 2.4 (Carnahan, Luther e Wilkes)

Uma região de água profunda está inicialmente a uma temperatura constante T_i . O líquido pode ser aproximado como um meio semi-infinito e homogêneo em todas as direções. Ao instante inicial $t = 0$, a temperatura da superfície é baixada para T_e , um valor menor que a temperatura T_f do ponto de congelamento do líquido, e é mantida constante. Aqui mais uma vez há uma aproximação das condições iniciais de uma nevasca. Nessa situação, forma-se um estrato superficial do mesmo fluido no estado sólido de comprimento d . Desprezando o efeito das possíveis correntes de convecção e do pequeno movimento vertical devido à flutuação do sólido, o transporte de calor acontece por difusão. A solução analítica existe e pode ser encontrada na página 285 do livro de Carslaw e Jaeger. O comprimento d é dado em função do tempo por

$$d = 2\eta\sqrt{\alpha_S t} , \quad (16)$$

e os perfis de temperatura nas fases sólida S e líquida L são dados por

$$\begin{cases} \frac{T_S(x,t) - T_e}{T_i - T_e} = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_S t}}\right)}{\operatorname{erf}(\eta)} & 0 \leq x \leq d \\ \frac{T_i - T_L(x,t)}{T_i - T_f} = \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_L t}}\right)}{\operatorname{erfc}\left(\eta\sqrt{\alpha_S/\alpha_L}\right)} & x > d \end{cases} , \quad (17)$$

onde erf é a função erro, erfc é a função erro complementar e α_S , α_L são as difusividades térmicas das fases sólida e líquida, respectivamente. O parâmetro η é a solução

Parâmetro	sólido gelo	líquido água	unidades
k	2,25	0,5675	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$
ρ	0,9175	1,000	g cm^{-3}
c_p	2,027	4,204	$\text{J g}^{-1} \text{K}^{-1}$

Tabela 1: Propriedades térmicas da água e do gelo.

da equação

$$\frac{e^{-\eta^2}}{\text{erf}(\eta)} - \frac{k_L \alpha_S^{1/2}}{k_S \alpha_L^{1/2}} \frac{T_i - T_f}{T_f - T_e} \frac{e^{-\eta^2 \alpha_S / \alpha_L}}{\text{erfc}(\eta \sqrt{\alpha_S / \alpha_L})} = \frac{\eta L \pi^{1/2}}{c_p S (T_f - T_e)}, \quad (18)$$

onde k , c_p são as condutibilidades térmicas, e os calores específicos à pressão constante das fases indicadas e L é o calor latente de fusão. A difusividade térmica pode ser expressa em termos dessas constantes como $\alpha = k/(\rho c_p)$ onde ρ é a densidade da fase considerada. No caso da água (fase líquida) e do gelo (fase sólida) os valores desses parâmetros são dados na Tabela 1. O calor latente de fusão é 334 J g^{-1} . Considere o caso em que $T_i = 5^\circ\text{C}$, $T_e = -5^\circ\text{C}$ e (obviamente) $T_f = 0^\circ\text{C}$.

- Usando as equações e os valores dados, determine a espessura da camada de gelo d após 5 e 20 dias.
- Faça os gráficos dos perfis de temperatura cobrindo as duas fases nos mesmos instantes de tempo.

Exercício 2.5 (Kahaner, Moler e Nash)

Considere o problema de determinar a temperatura de equilíbrio de uma barra condutora usada em um sistema de potência para distribuir a energia elétrica. O sistema pode ser aproximado com um condutor cilíndrico, de diâmetro d e resistência por unidade de comprimento R , percorrido por uma corrente I e colocado em ar dentro de uma caixa cujas paredes são situadas muito longe do condutor. Considere que a temperatura das paredes seja T_s e a temperatura do ar T_a . A temperatura T_b de equilíbrio da barra pode ser encontrada analiticamente e é dada pela solução da equação

$$\pi d h (T_b - T_a) + \pi d \epsilon \sigma (T_b^4 - T_s^4) = I R^2 \quad (19)$$

onde h é o coeficiente de transferência de calor para o fluxo de ar, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{K}^{-4}$ a constante de Stefan-Boltzmann e ϵ a emissividade superficial da barra. A Equação (19) expressa simplesmente que no equilíbrio térmico o calor gerado na barra, por unidade de comprimento, pela passagem da corrente segundo a lei de Ohm e o calor perdido por convecção através do ar e por irradiação das paredes devem ser iguais. Considere o caso de uma barra de 10 cm de diâmetro em ar à temperatura ambiente em uma caixa à temperatura ambiente ($T_a = T_s = 298,15 \text{ K} = 25^\circ\text{C}$),

Gás	A_0 [kPa m ⁶ kmol ⁻²]	a [m ⁻³ kmol]	B_0 [m ³ kmol ⁻¹]	b [m ⁻³ kmol]	c [m ³ K ³ kmol ⁻¹]
ar	131,8441	0,01931	0,04611	-0,001101	$4,34 \cdot 10^4$
Argônio, Ar	130,7802	0,02328	0,03931	0,0	$5,99 \cdot 10^4$
Dióxido de Carbono, CO ₂	507,2836	0,07132	0,10476	0,07235	$6,60 \cdot 10^5$
Helio, He	2,1886	0,05984	0,01400	0,0	$4,0 \cdot 10^1$
Hidrogênio, H ₂	20,0117	-0,00506	0,02096	-0,04359	$5,04 \cdot 10^2$
Nitrogênio, N ₂	136,2315	0,02617	0,05046	-0,00691	$4,20 \cdot 10^4$
Oxigênio, O ₂	151,0857	0,02562	0,04624	0,004208	$4,80 \cdot 10^4$

Tabela 2: Valores numéricos das constantes na equação de estado de Beattie-Bridgeman para alguns gases comuns (veja Equações (20) e (21)), apresentados em G. J. van Wylen e R. E. Sonntag, “Fundamentals of classical thermodynamics”, 3^a ed., Wiley, New York 1986, Tabela 3.3 na pagina 46.

percorrida por uma corrente que gera 100 W m^{-1} de potência térmica, com os valores dos parâmetros $h = 20 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ e $\epsilon = 0,8$. Determine a temperatura de equilíbrio da barra.

Exercício 2.6 (Carnahan, Luther e Wilkes)

A equação de estado de um gás real tende a se desviar da lei dos gases ideais especialmente para altas densidades. Uma das equações de estado desenvolvida para descrever de forma mais acurada gases reais é a equação de Beattie-Bridgeman

$$p = \frac{RT}{v} + \frac{\beta}{v^2} + \frac{\gamma}{v^3} + \frac{\delta}{v^4} \quad , \quad (20)$$

onde p é a pressão, v o volume molar, T a temperatura e R a constante dos gases ideais. Na Equação (20) os parâmetros β , γ e δ dependem da temperatura segundo as equações

$$\begin{aligned} \beta &= RT B_0 - A_0 - \frac{Rc}{T^2} \\ \gamma &= -RT B_0 b + A_0 a - \frac{Rc B_0}{T^2} \quad , \\ \delta &= \frac{R B_0 b c}{T^2} \end{aligned} \quad (21)$$

onde as constantes A_0 , B_0 , a , b e c são características do gás sendo examinado. Os valores numéricos para alguns gases comuns foram determinados ajustando dados experimentais e são reproduzidos na Tabela 2.

- a) Desenvolva um programa para calcular o volume molar v a partir da temperatura T e pressão p resolvendo a Equação (20).

Temp. K	Pressão em bar											
	1	5	10	20	40	60	80	100	200	300	400	500
100	0,9773	0,0183	0,0366	0,0729	0,1449	0,2162	0,2867	0,3567	0,6975	1,0267	1,3470	1,6932
150	0,9932	0,9647	0,9273	0,8447	0,6101	0,2249	0,2781	0,3324	0,5934	0,8387	1,0732	1,2995
200	0,9972	0,9857	0,9713	0,9419	0,8810	0,8208	0,7624	0,7121	0,6870	0,8360	1,0051	1,1982
250	0,9988	0,9935	0,9869	0,9741	0,9494	0,9263	0,9056	0,8877	0,8590	0,9207	1,0262	1,1479
300	0,9995	0,9969	0,9941	0,9884	0,9777	0,9686	0,9611	0,9552	0,9533	0,9950	1,0673	1,1786
400	1,0001	0,9997	0,9998	0,9999	1,0004	1,0018	1,0031	1,0056	1,0280	1,0656	1,1157	1,1976
500	1,0002	1,0007	1,0012	1,0034	1,0071	1,0113	1,0154	1,0205	1,0501	1,0874	1,1301	1,1997
600	1,0003	1,0012	1,0025	1,0046	1,0094	1,0143	1,0198	1,0250	1,0553	1,0904	1,1291	1,1933
800	1,0003	1,0012	1,0023	1,0050	1,0102	1,0151	1,0205	1,0258	1,0532	1,0830	1,1147	1,1707
1000	1,0002	1,0013	1,0022	1,0050	1,0096	1,0142	1,0193	1,0239	1,0484	1,0736	1,0999	1,1497

Tabela 3: Valores numéricos da comprimibilidade (veja a Equação (22)) para Argônio, apresentados em Rabinovich (ed.), “Thermophysical Properties of Neon, Argon, Krypton and Xenon”, Standard Press, Moscow, 1976 (edição em Inglês da Hemisphere, New York, 1988, pagina 604).

Temp.	Pressão em bar											
K	1	5	10	20	40	60	80	100	200	300	400	500
70	0,0057	0,0287	0,0573	0,1143	0,2277	0,3400	0,4516	0,5623	1,1044	1,6308	solido	solido
80	0,9593	0,0264	0,0528	0,1053	0,2093	0,3122	0,4140	0,5148	1,0061	1,4797	1,9396	2,3879
90	0,9722	0,0251	0,0500	0,0996	0,1975	0,2938	0,3888	0,4826	0,9362	1,3700	1,7890	2,1962
100	0,9798	0,8910	0,0487	0,0966	0,1905	0,2823	0,3720	0,4605	0,8840	1,2852	1,6707	2,0441
120	0,9883	0,9397	0,8732	0,7059	0,1975	0,2822	0,3641	0,4438	0,8188	1,1684	1,5015	1,8223
140	0,9927	0,9635	0,9253	0,8433	0,6376	0,4251	0,4278	0,4799	0,7942	1,0996	1,3920	1,6726
160	0,9952	0,9766	0,9529	0,9042	0,8031	0,7017	0,6304	0,6134	0,8107	1,0708	1,3275	1,5762
180	0,9967	0,9846	0,9690	0,9381	0,8782	0,8125	0,7784	0,7530	0,8550	1,0669	1,2893	1,5105
200	0,9978	0,9897	0,9791	0,9592	0,9212	0,8882	0,8621	0,8455	0,9067	1,0760	1,2683	1,4631
250	0,9992	0,9960	0,9924	0,9857	0,9741	0,9655	0,9604	0,9589	1,0048	1,1143	1,2501	1,3962
300	0,9998	0,9990	0,9983	0,9971	0,9964	0,9973	1,0000	1,0052	1,0559	1,1422	1,2480	1,3629
350	1,0001	1,0007	1,0011	1,0029	1,0069	1,0125	1,0189	1,0271	1,0810	1,1560	1,2445	1,3405
400	1,0002	1,0011	1,0024	1,0057	1,0125	1,0199	1,0283	1,0377	1,0926	1,1609	1,2382	1,3216
450	1,0003	1,0018	1,0033	1,0073	1,0153	1,0238	1,0332	1,0430	1,0973	1,1606	1,2303	1,3043
500	1,0004	1,0020	1,0040	1,0081	1,0167	1,0257	1,0350	1,0451	1,0984	1,1575	1,2213	1,2881
600	1,0004	1,0021	1,0040	1,0084	1,0173	1,0263	1,0355	1,0450	1,0951	1,1540	1,2028	1,2657
800	1,0004	1,0017	1,0036	1,0074	1,0157	1,0237	1,0320	1,0402	1,0832	1,1264	1,1701	1,2140
1000	1,0003	1,0015	1,0034	1,0067	1,0136	1,0205	1,0275	1,0347	1,0714	1,1078	1,1449	1,1814

Tabela 4: Valores numéricos da comprimibilidade (veja a Equação (22)) para Nitrogênio, apresentados em Vasserman, Kazavchinskii, and Rabinovich, “Thermophysical Properties of Air and Air Components”, Moscow, Nauka, 1966 (traduzido pelo NBS-NSF Trans. TT 70-50095, 1971).

b) Faça o gráfico da comprimibilidade

$$z = \frac{pv}{RT} \quad (22)$$

e compare os resultados com alguns dos valores dados na Tabela 3 para Argônio e na Tabela 4 para Nitrogênio. A comprimibilidade z pode ser usada para quantificar o desvio da lei dos gases ideais ($z = 1$).

Exercício 2.7

A confirmação experimental da Lei de Planck para a radiação de corpo negro contribuiu significativamente para a afirmação da mecânica quântica. Contudo, quando Planck fez seus cálculos pela primeira vez, ele teve que obter o valor da constante h a partir do que era experimentalmente conhecido na época.

A potência térmica Φ_T emitida por unidade de superfície por um corpo negro é

descrita pela lei de Stefan-Boltzman

$$\Phi_T = \sigma T^4 \quad (23)$$

onde T é a temperatura do corpo negro e o valor da constante $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ tinha sido medido experimentalmente.

A Lei de Wien, que relacionava o comprimento de onda λ_{max} , correspondente à máxima potência emitida, com a temperatura T

$$\lambda_{\text{max}} T = c_W \quad (24)$$

também tinha sido verificada experimentalmente e a constante $c_W = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$ era conhecida.

Planck tinha considerado como protótipo de um corpo negro uma cavidade mantida a uma temperatura T e em equilíbrio térmico com a radiação térmica (eletromagnética) contida no seu interior. A cavidade tem um pequeno furo que se comporta como um corpo negro. A densidade de energia $\rho(\lambda, T)$ por unidade de volume e por unidade de comprimento de onda λ da radiação, tinha sido obtida por Planck como

$$\rho(\lambda, T) = 8\pi h c \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1} \frac{1}{\lambda^5} \quad (25)$$

onde c é a velocidade da luz, k a constante de Boltzmann e h a constante de Planck. Considerando que a radiação é emitida com a velocidade da luz e é isotrópica, não é difícil demonstrar, a partir da Equação (25), que a constante de Stefan-Boltzmann está relacionada com as constantes h e k da forma

$$\sigma = \frac{8\pi^5}{15} \frac{k^4}{(hc)^3} \frac{c}{4} \quad (26)$$

Na época em que Planck fez o primeiro trabalho sobre a radiação do corpo negro, o valor da constante de Boltzmann não era bem conhecido experimentalmente. Planck usou os valores conhecidos de σ e de c_W para obter simultaneamente os valores de h e k .

O comprimento de máxima emissão é dado pela condição $d\rho/d\lambda = 0$, que leva a uma equação que não pode ser resolvida analiticamente.

- Exprima a condição de máximo de ρ usando a variável $l = \frac{\lambda k T}{hc}$ e encontre a equação em l que tem que ser resolvida.
- Desenvolva um programa para calcular o zero dessa função.
- Por fim encontre os valores de h e k a partir dos valores de σ e de c_W dados e compare com os valores aceitos.